Un jeu pour le π-calcul

Tom Hirschowitz

Motivation

Pour raisonner sur les langages de programmation :

- pour l'instant des *méthodes*;
- on aimerait une *théorie*.

On aimerait pouvoir dire :

> «Par le théorème de Leroy, le morphisme f entre langages de programmation préserve et reflète telle équivalence observationnelle.»

Motivation : une théorie des langages de programmation

Essais

- Plotkin,Turi,Fiore : approche bialgébrique = version algébrique de la sémantique opérationnelle;
- Montanari : approche double-catégorique;
- Hirscho : approche 2-catégorique.

Peu utilisés. Pourquoi?

- Poussés pas assez loin? (Pas de théorème de Leroy...)
- Trop exigeants en matière de bagage mathématique?
- Trop proches de la syntaxe?

On a donc le droit d'essayer de pousser ceux-là ou d'en proposer d'autres.

Approche suivie

Partir de la sémantique; syntaxe = notion dérivée.

Motivation (© Damien Pous)

But

- Une théorie des langages de programmation partant de la sémantique.
- Une notion de langage de programmation partant de la sémantique.
- Une approche sémantique suffisamment générale.

Vers une approche sémantique suffisamment générale

Première idée

- Approche attractive dans le cas déterministe : sémantique des jeux.
- Comment généraliser au cadre concurrent?

Essais

- Melliès et al. : jeux sur des structures d'évènements, utilisés dans un cadre confluent.
- Winskel et al. : généralisation au cadre concurrent, mais :
  - stratégie = structure *ad hoc*,
  - notion d'innocence non-standard.

Vers une approche sémantique suffisamment générale

Deuxième idée

- Approche attractive dans le cas concurrent : sémantiques de préfaisceaux.
- Marche bien pour les systèmes de transitions étiquetés (lts).
- Comment généraliser aux calculs genre λ ou π?

Essais Je ne connais que Fiore et al. :

- construction d'un gros lts syntaxique;
- les termes/processus sont des sommets.

Vers une approche sémantique suffisamment générale

Notre approche

- raffiner la catégorie de base; exemple avec π :
  - Fiore et al. : objets = nombre de canaux,
  - ici : contexte actif multi-trous;
- dédoubler la catégorie de base :
  - une catégorie $\mathbb{V}$ de vues,
  - une catégorie $\mathbb{P}$ de parties arbitraires,
  - un plongement $i : \mathbb{V} \hookrightarrow \mathbb{P}$
- stratégies = préfaisceaux innocents = stratégies concurrentes.

Stratégies = préfaisceaux innocents = stratégies concurrentes

Préfaisceau innocent

- foncteur $P^{op} \longrightarrow$ sets ne dépendant que des vues (où sets est une catégorie de petits ensembles),
- techniquement : obtenu par extension le long de $V \hookrightarrow P$.

Stratégie concurrente

- stratégie = ensemble de parties clos par préfixe;
- stratégie = foncteur $P^{op} \longrightarrow 2$, où $2 = \{0 \longrightarrow 1\}$;
- stratégie concurrente = foncteur $P^{op} \longrightarrow$ sets.

Moralement

Stratégie concurrente : accepte une partie de plusieurs manières.

Remarque

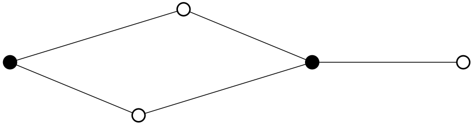
- Préfaisceau sur $V \approx$ syntaxe.
- Préfaisceau sur $P \approx$ sémantique.

Déjà fait

- Avec Damien Pous : jeu pour CCS (Milner) selon ces principes.
- Calco '13, version journal soumise : preuve que ce jeu définit une sémantique pleinement abstraite.

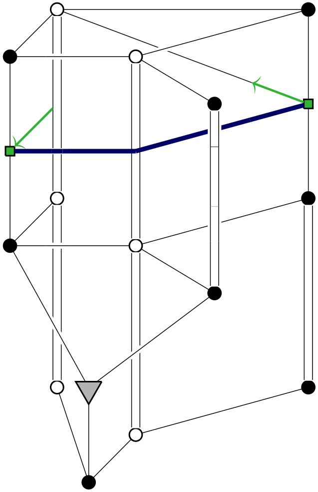
CCS, trop fasse.

Tête des positions

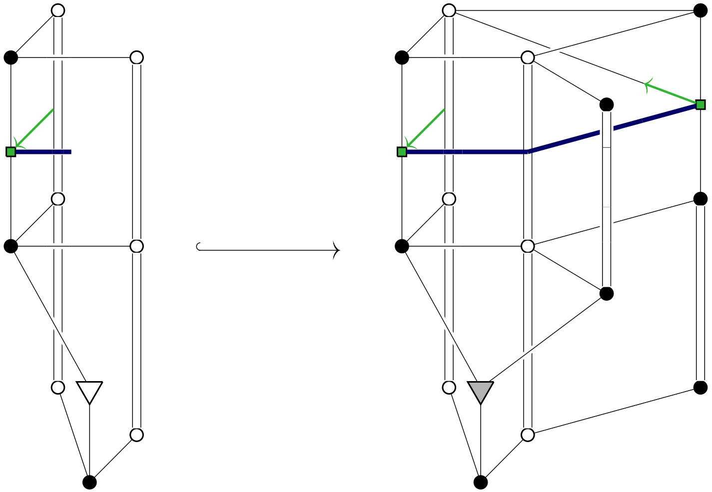


- $\bullet \approx$ joueur.
- $\circ \approx$ canal.
- Arêtes : connaissance d'un canal par un joueur.

Tête des parties



Innocence



Stratégies sur une position X = catégorie de foncteurs $V_X^{op} \to$ sets.

Innocence : comportement global

Par extension de Kan à droite : pour toute position X, on prend

$$\begin{tikzcd}
V_X{}^{op} \arrow[rr, hook, "i^{op}"] \arrow[dr, "S"'] & \arrow[d, phantom, "\cong"] & P_X{}^{op} \arrow[dl, "S' = \mathrm{ran}_{i^{op}}(S)"] \\
& \mathrm{sets} &
\end{tikzcd}$$

Formule explicite

- Générale : $S'(p) = \int_{v \in V_X} S(v)^{P_X(v,p)}$.
- Cas booléen; p acceptée ssi toutes ses vues le sont :

$$S'(p) = \bigwedge_{\{(v \xrightarrow{\alpha} p) \in P_X\}} S(v).$$

Interaction

- Partageons les joueurs d'une position X en deux équipes.
- Ça définit deux sous-positions $X_1 \hookrightarrow X \hookleftarrow X_2$ ne partageant aucun joueur.
- On a
$$V_X \simeq V_{X_1} + V_{X_2}.$$
- Donc
$$[V_X^{op}, \text{sets}] \simeq \left[V_{X_1}^{op}, \text{sets}\right] \times \left[V_{X_2}^{op}, \text{sets}\right].$$
- On fait jouer une stratégie pour X_1 contre/avec une stratégie sur X_2 par *copairing* :

$$\begin{tikzcd}
V_{X_1}^{op} \arrow[r, "\mathrm{inj}_l"] \arrow[dr, "S_1"'] & V_X^{op} \arrow[d, "{[S_1, S_2]}"] & V_{X_2}^{op} \arrow[l, "\mathrm{inj}_r"'] \arrow[dl, "S_2"] \\
& \text{sets} &
\end{tikzcd}$$

De CCS à π

Point crucial dans le travail sur CCS :

- pour toute position X du jeu,
- pour toute sous-position $Y \hookrightarrow X$,
- pour toute partie $u : X' \to X$ de position initiale X,

relèvement canonique

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "u_{|Y}"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow \alpha_{u,Y}"] & X' \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

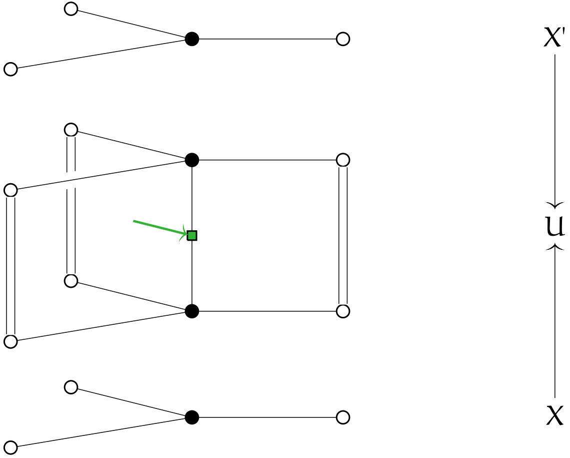
faisant des parties une catégorie fibrée au-dessus des positions (Grothendieck).

Intuition

La restriction $u_{|Y}$ est la plus grosse partie sur Y s'envoyant dans u.

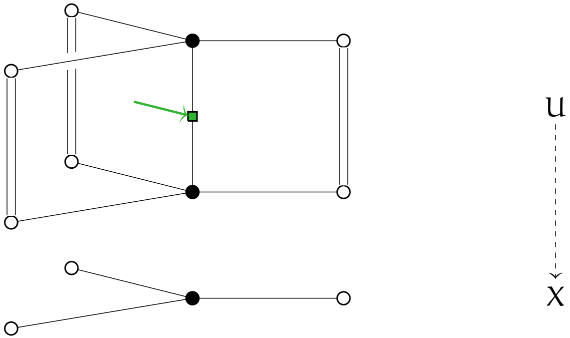
Relèvement pour CCS

Dans le jeu pour CCS, partie = cospan dans une certaine catégorie de diagrammes.
Exemple :



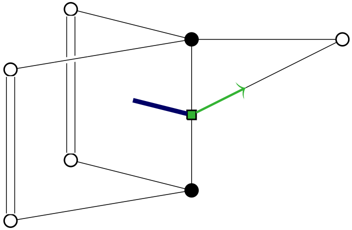
Pourquoi ça marche?

On sait toujours «projeter» une partie sur la position de départ :



En π, beaucoup moins clair

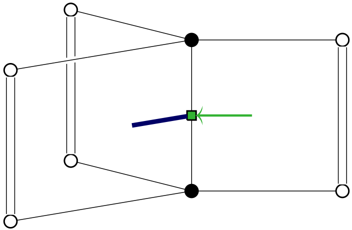
La réception d'un nom inconnu :



On a envie de projeter le nom reçu sur le joueur initial.
(En tout cas, c'est fait comme ça pour la création de nom en CCS.)

En π, beaucoup moins clair

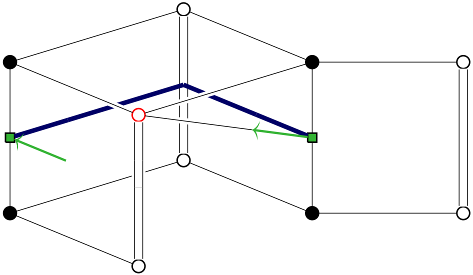
L'émission d'un nom :



On a envie de projeter le nom envoyé sur lui-même.

En π, beaucoup moins clair

Une synchronisation :



Problème

On ne peut pas projeter le nom envoyé à la fois sur lui-même et sur le joueur récepteur.

Systèmes de factorisation (Freyd et Kelly, 1972)

Soit une catégorie $\mathcal{C}$.

Définition 1.

Soit $f \perp g$ ssi pour tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & D \end{tikzcd}$$

il existe un unique relèvement h faisant commuter les deux triangles.

Ça s'étend aux ensembles de morphismes :

- $\mathcal{E} \perp \mathcal{M}$ ssi pour tout $e \in \mathcal{E}$ et $m \in \mathcal{M}$, $e \perp m$;
- $\mathcal{E}^{\perp} = \{m \mid \forall e \in \mathcal{E}.\, e \perp m\}$.
- ${}^{\perp}\mathcal{M} = \{e \mid \forall m \in \mathcal{M}.\, e \perp m\}$.

Systèmes de factorisation (Freyd et Kelly, 1972)

Définition 2. Système de factorisation dans $\mathcal{C}$

$(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ tels que

- $\mathcal{R} = \mathcal{L}^{\perp}$,
- $\mathcal{L} = {}^{\perp}\mathcal{R}$,
- tout f se factorise en $r \circ l$ avec $l \in \mathcal{L}$ et $r \in \mathcal{R}$.

Proposition 1.

$\mathcal{L}$ est stable par pushout et par composition.
$\mathcal{R}$ est stable par pullback et par composition.

Génération cofibrante (Bousfield, 1977)

Théorème 1.

Etant donnée un ensemble $\mathcal{T}$ de morphismes dans une catégorie localement présentable,

$$\left({}^{\perp}\!\left(\mathcal{T}^{\perp}\right), \mathcal{T}^{\perp}\right)$$

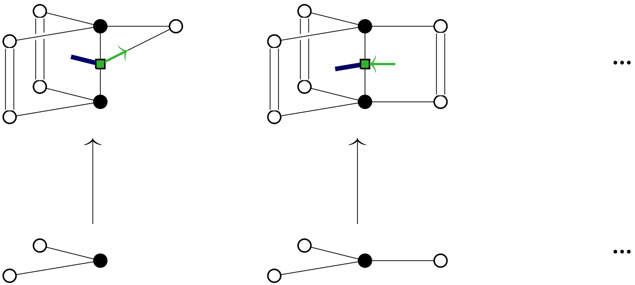
forme un système de factorisation.

- Seul l'axiome de factorisation n'est pas évident.
- C'est très bien expliqué sur le Catlab de Joyal :

  http://ncatlab.org/joyalscatlab/show/Factorisation+systems

Application à notre catégorie de diagrammes de cordes

On prend comme $\mathcal{T}$:



- Construction de Bousfield $\rightsquigarrow$ système de factorisation $(\mathcal{V}, \mathcal{H})$,
- pour horizontaux $(\mathcal{H})$ et verticaux $(\mathcal{V})$.

Morphismes horizontaux

Pour tout $t \in \mathcal{T}$, u, v faisant commuter le carré il existe un unique relèvement :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "t"'] & A \arrow[d, "h \in \mathcal{H}"] \\
M \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}$$

Interprétation

Si
- A contient la position initiale X
- d'un coup M présent dans B,

alors M était déjà présent dans A.

Une catégorie fibrée de cospans

Relèvement du cospan (s, v) le long de h :

- on factorise $v \circ h$ en $h' \circ v'$;

$$
\begin{tikzcd}
Y' \arrow[r, "h'' \in \mathcal{H}"] \arrow[d, "s'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X' \arrow[d, "s"] \\
V \arrow[r, "h' \in \mathcal{H}"] & U \\
Y \arrow[u, "\mathcal{V} \ni v'"] \arrow[r, "h \in \mathcal{H}"'] & X \arrow[u, "v \in \mathcal{V}"']
\end{tikzcd}
$$

- on prend le produit fibré de s et h'

Propriété universelle du relèvement

$$\begin{tikzcd}
Z' \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[dd] & & \\
& Y' \arrow[r] \arrow[dd] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X' \arrow[dd] \\
W \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] & & \\
& V \arrow[r, "h' \in \mathcal{H}"'] & U \\
Z \arrow[uu, "\mathcal{V} \ni v''"] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] & & \\
& Y \arrow[uu] \arrow[r] & X \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

Résultat

Théorème 2.
Les parties sont bien fibrées sur les positions.

Le système de factorisation s'est révélé un bon guide.

Conclusion et perspectives

Résultat général

Sous hypothèses :

$$\text{Système de factorisation } (\mathcal{V}, \mathcal{H})$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\text{une catégorie de cospans fibrée sur } \mathcal{H}.$$

- Application : sémantique de jeux pour le π-calcul.
- Travail en cours : preuve que la sémantique obtenue est pleinement abstraite.
- Cadre abstrait en maturation.
- Premier cas de traduction : CCS $\longrightarrow \pi$, à étudier.